ВМК, 5-й курс, 3-й поток
Конспекты курса по теории игр и исследованию операций [1]

Косовец Дмитрий   Ручкин Дмитрий

2009 год

[1] Версия 0.2 — лекции 1-3

Литература по курсу:

1. Гермейер Ю.Б. «Введение в теорию исследования операций»
2. Давыдов Э.Г. «Исследование операций»
3. Морозов В.В. «Основы теории игр»
4. Васин А.А., Морозов В.В. «Теория игр и модели математической экономики»

Антагонистические игры.

В *игре* принимают участие два *игрока* с противоположными интересами. Каждый игрок имеет свое множество *стратегий*. Обозначим стратегии первого и второго игроков как x и y, а множества таких стратегий — как X и Y соответственно. Обычно X и Y — компактные множества в конечномерных евклидовых пространствах.

Введём также *платёжную функцию* $K(x, y)$, обозначающую выигрыш первого игрока (и проигрыш второго игрока). Соответственно, $-K(x, y)$ — выигрыш второго игрока.

Если бы, например, первому игроку был известен y, то получилась бы просто задача на экстремум. Но первый игрок может не знать о том, какую стратегию выбрал 2-й игрок, и наоборот. Возникает неопределенность.

Рассмотрим частный случай, когда X и Y конечны, — в таком случае антагонистическая игра называется *матричной*. Приняты следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
&X = \{1, \ldots, n\}\,,\; Y = \{1, \ldots, m\} \text{ — множества стратегий;}\\
&K(i, j) \text{ — платёжная функция;}\\
&i = \overline{1, n},\; j = \overline{1, m} \text{ — стратегии первого и второго игроков.}
\end{aligned}
$$

Принцип наилучшего гарантированного результата заключается в том, что каждый игрок стремится максимизировать свой выигрыш «в худшем случае» (когда противоположный игрок выбирает наиболее неудобную для текущего игрока стратегию).

$$\max_i \min_j K(i, j) = \underline{I} = \min_j K(i_0, j) \text{ при некотором } i_o \in X.$$

Величина $\underline{I} = \min\limits_j K(i_0, j)$ называется *наилучшим гарантированным результатом* первого игрока, или *нижней ценой игры*. Стратегия i_o, на которой он достигается, называется *наилучшей гарантированной стратегией* первого игрока.

Аналогично, для второго игрока:

$$\min_j \max_i K(i, j) = \overline{I} = \max_j K(i, j_0) \text{ при некотором } j_o \in Y.$$

Величина $\overline{I}$ называется *верхней ценой игры.*

Теорема 1. В любой конечной антагонистической игре $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.
Доказательство. Выберем произвольные $i \in X$, $j \in Y$. Верны следующие неравенства:

$$\min_j K(i,j) \leqslant K(i,j) \leqslant \max_i K(i,j) \quad \Rightarrow \quad \min_j K(i,j) \leqslant \max_i K(i,j).$$

Левая часть неравенства зависит от i, а правая — нет. Поэтому

$$\max_i \min_j K(i,j) \leqslant \max_i K(i,j).$$

Теперь правая часть неравенства зависит от j, а левая — нет. Поэтому

$$\underline{I} = \max_i \min_j K(i,j) \leqslant \min_j \max_i K(i,j) = \overline{I}. \quad \square$$

Пример. Матричная антагонистическая игра может быть представлена в виде матрицы, элементы которой равны значениям платёжной функции, столбцы соответствуют стратегиям первого игрока, а строки соответствуют стратегиям второго игрока:

$$\begin{array}{c} \\ \text{i=1} \\ \text{i=2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{j=1} & \text{j=2} & \text{j=3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \underline{0} \\ 2^* & 4^* & \underline{1^*} \end{pmatrix} \end{array}$$

Рассуждаем за первого игрока: если он выбирает стратегию $i = 1$, его выигрыш в худшем случае составит $\min_j K(1,j) = \min\{1,2,0\} = 0$. Соответственно, при $i = 2$ его выигрыш в худшем случае будет равен $\min\{2,4,1\} = 1$. Таким образом, нижняя цена игры $\underline{I}$ будет равна $\max\{0,1\} = 1$, а наилучшей гарантирующей стратегией первого игрока является $i_0 = 2$.

Аналогично, проигрыш второго игрока в худшем случае может равняться 2, 4 или 1, в зависимости от выбора стратегии j. Минимизировав проигрыш, получим верхнюю цену игры $\overline{I} = \min\{2,4,1\}$; при этом наилучшей гарантирующей стратегией второго игрока является $j_0 = 3$. $\square$

В общем случае, когда множества X и Y не обязательно являются конечными, у платёжной функции может не быть максимумов и минимумов.

Тем не менее, можно ввести понятия верхней и нижней цены игры следующим образом:

$$\sup_x \inf_y K(x,y) = \underline{I} = \inf_y K(x_0, y);$$

$$\inf_y \sup_x K(x,y) = \overline{I} = \sup_x K(x, y_0).$$

Сопутствующие понятия вводятся точно так же.

Теорема 1'. В любой антагонистической игре $\underline{I} \leqslant \overline{I}$.
Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 1. $\square$

Если первый игрок обладает информацией о том, какую стратегию избрал второй игрок, то наилучший гарантированный выигрыш первого игрока $\underline{I}$ равен $\overline{I}$. Величина $\overline{I} - \underline{I}$ называется *ценой информации.* Из теоремы следует, что она всегда неотрицательна; другими словами, наличие информации не может уменьшить выигрыш, а может только увеличить его.

Лемма 1. Если $K(x,y)$ непрерывна на $X \times Y$, а X и Y — компактные множества, то

$$\underline{W}(x) = \min_y K(x,y) \text{ — непрерывна на } X;$$

$$\overline{W}(y) = \max_x K(x,y) \text{ — непрерывна на } Y.$$

Доказательство. По определению непрерывности функции $K(x,y)$ на $X \times Y$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такая, что для любых точек (x_1, y_1), (x_2, y_2) с $\rho\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) \leqslant \delta$ справедливо неравенство $|K(x_1, y_1) - K(x_2, y_2)| \leqslant \varepsilon$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и подберём для него $\delta > 0$ из вышеописанного свойства непрерывности $K(x,y)$. Выберем произвольные стратегии $x_1, x_2 \in X$ такие, что $\rho\left(x_1, x_2\right) \leqslant \delta$. Таким образом, доказательство непрерывности $\underline{W}(x)$ на X сводится к обоснованию неравенства $|\underline{W}(x_1) - \underline{W}(x_2)| \leqslant \varepsilon$.

Обозначим за $y(x)$ функцию, на значениях которой достигается $\min\limits_y K(x,y)$ при заданном x: $\min\limits_y K(x,y) = K(x, y(x))$. Тогда, используя непрерывность $K(x,y)$, получаем следующие соотношения:

$$\underline{W}(x_1) - \underline{W}(x_2) = K(x_1, y(x_1)) - K(x_2, y(x_2)) \geqslant$$
$$\geqslant K(x_1, y(x_1)) - K(x_2, y(x_1)) \geqslant -\varepsilon;$$

$$\underline{W}(x_1) - \underline{W}(x_2) = K(x_1, y(x_1)) - K(x_2, y(x_2)) \leqslant$$
$$\leqslant K(x_1, y(x_2)) - K(x_2, y(x_2)) \leqslant \varepsilon.$$

Следовательно, справедливо и неравенство

$$|\underline{W}(x_1) - \underline{W}(x_2)| \leqslant \varepsilon,$$

то есть $\underline{W}(x)$ действительно непрерывна на X. Для $\overline{W}(x)$ доказательство аналогичное. $\square$

Следствие 1. Если выполнены условия леммы 1, то $\max\limits_x \min\limits_y K(x, y) = \underline{I}$.

Определение. Пара (x_0, y_0) называется *седловой точкой* функции $K(x, y)$, если $K(x, y_0) \leqslant K(x_0, y_0) \leqslant K(x_0, y)$ $\forall x \in X, \forall y \in Y$.

Для конечных игр неравенство аналогичное:

$$K(i, j_0) \leqslant K(i_0, j_0) \leqslant K(i_0, j),\ \forall i = \overline{1, n}, \forall j = \overline{1, m}.$$

Теорема 2. В конечной игре седловая точка существует тогда и только тогда, когда $\underline{I} = \overline{I}$. Если (i_0, j_0) — седловая точка, то $K(i_0, j_0) = \underline{I} = \overline{I}$.
Доказательство. Сначала докажем достаточность условия. Пусть $\underline{I} = \overline{I}$. Возьмём i_0 и j_0 — наилучшие гарантирующие стратегии первого и второго игроков. Выпишем следующую цепочку неравенств:

$$K(i, j_0) \leqslant \max_i K(i, j_0) = \min_j \max_i K(i, j) = \overline{I} =$$
$$= \underline{I} = \max_i \min_j K(i, j) = \min_j K(i_0, j) \leqslant K(i_0, j).$$

Таким образом, $K(i, j_0) \leqslant K(i_0, j)$ $\forall i, j$.
Положив $j = j_0$, получим

$$K(i, j_0) \leqslant K(i_0, j_0)\ \forall i.$$

Аналогично, положив $i = i_0$, получим

$$K(i_0, j_0) \leqslant K(i_0, j) \; \forall j.$$

Из этих двух неравенств следует, что (i_0, j_0) — седловая точка. Таким образом, достаточность доказана.
Теперь докажем необходимость условия теоремы. Пусть (i_0, j_0) — седловая точка игры. Тогда по определению

$$K(i, j_0) \leqslant K(i_0, j_0) \leqslant K(i_0, j) \; \forall i, j.$$

Следовательно,

$$\max_i K(i, j_0) \leqslant K(i_0, j_0) \leqslant \min_j K(i_0, j).$$

Используя это неравенство, выпишем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \overline{I} = \min_j \max_i K(i, j) \leqslant& \\ &\leqslant \max_i K(i, j_0) \leqslant K(i_0, j_0) \leqslant \min_j K(i_0, j) \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \max_i \min_j K(i, j) = \underline{I}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили неравенство $\overline{I} \leqslant \underline{I}$. С другой стороны, в силу теоремы 1 справедливо $\overline{I} \geqslant \underline{I}$. Следовательно, $\overline{I} = \underline{I}$. $\square$

Пример.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} {\scriptstyle j_0=1} & & \end{array} \\ {\scriptstyle i_0=3} & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ \boxed{2} & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Здесь $\underline{I} = \overline{I} = 2$, а выделенный элемент матрицы является седловой точкой. Он является максимальным в столбце и минимальным в строке. $\square$

Пример.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} & {\scriptstyle j_0=2} & & {\scriptstyle j_0=4} \end{array} \\ {\scriptstyle i_0=2} & \begin{pmatrix} 2 & 3^* & 4^* & \underline{1} \\ 5^* & \underline{2} & 2 & 3^* \\ 4 & \underline{1} & 3 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Здесь нет седловой точки, $\underline{I} = 2 < 3 = \overline{I}$. $\square$

Теорема 3. Если существут стратегии i_0, j_0 и $V = \mathrm{const}$ такие, что $K(i, j_0) \leqslant V \leqslant K(i_0, j)$ $\forall i, j$, то (i_0, j_0) — седловая точка игры, а $V = K(i_0, j_0)$.
Доказательство. Положим в неравенстве $i = i_0$, $j = j_0$. Тогда

$$K(i_0, j_0) \leqslant V \leqslant K(i_0, j_0) \ \Rightarrow \ V = K(i_0, j_0).$$

Подставив это в исходное неравенство, получим:

$$K(i, j_0) \leqslant V \leqslant K(i_0, j) \ \forall i, j \ \Rightarrow \ (i_0, j_0) \text{ — седловая точка.} \quad \square$$

Теорема 2'. Игра с платёжной функцией $K(x, y), x \in X, y \in Y$, имеет седловую точку тогда и только тогда, когда

$$\max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y).$$

Если (x_0, y_0) — седловая точка игры, то

$$K(x_0, y_0) = \max_{x \in X} \inf_{y \in Y} K(x, y) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X} K(x, y).$$

Доказательство. Сначала докажем достаточность условия. Выберем x_0 и y_0, на которых достигаются соответственно максимум и минимум:

$$x_0 : \ \max_x \inf_y K(x, y) = \inf_y K(x_0, y);$$

$$y_0 : \ \min_y \sup_x K(x, y) = \sup_x K(x, y_0).$$

Тогда для произвольных $x \in X, y \in Y$ справедливо следующее:

$$K(x, y_0) \leqslant \sup_x K(x, y_0) = \min_y \sup_x K(x, y) = \\ = \max_x \inf_y K(x, y) = \inf K(x_0, y) \leqslant K(x_0, y).$$

Таким образом, $\forall x \in X, y \in Y \ K(x, y_0) \leqslant K(x_0, y)$. Следовательно, (x_0, y_0) — седловая точка игры. Достаточность доказана.

Теперь докажем необходимость условия теоремы. Пусть (x_0, y_0) — седловая точка игры. По определению

$$K(x, y_0) \leqslant K(x_0, y_0) \leqslant K(x_0, y) \ \forall x \in X, y \in Y.$$

Следовательно,

$$\sup_x K(x, y_0) \leqslant K(x_0, y_0) \leqslant \inf_y K(x_0, y)\ \forall x \in X, y \in Y.$$

Запишем следующую цепочку неравенств:

$$\overline{I} = \inf_y \sup_x K(x, y) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_x K(x, y_0) \leqslant K(x_0, y_0) \leqslant \inf_y K(x_0, y) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_x \inf_y K(x, y) = \underline{I}.$$

Таким образом, $\overline{I} \leqslant \underline{I}$. В силу теоремы $1'$ $\overline{I} \geqslant \underline{I}$. Следовательно, $\overline{I} = \underline{I}$. Получается, что $\inf_y$ и $\sup_x$ достигаются на точках множеств Y и X соответственно. Поэтому в формуле для $\overline{I}$ можно $\inf\limits_y$ заменить на $\min\limits_y$, а в формуле для $\underline{I}$ $\sup\limits_x$ заменить на $\max\limits_x$. Получили равенство, которое требовалось доказать. $\square$

Замечание.

1. Пусть (x_1, y_1), (x_2, y_2) — седловые точки. Тогда (x_1, y_2), (x_2, y_1) также являются седловыми точками.

   Доказательство. Если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — седловые точки, то справедливы следующие соотношения:

   $$K(x, y_2) \leqslant K(x_2, y_2) = K(x_1, y_1) \leqslant K(x_1, y).$$

   Таким образом, $K(x, y_2) \leqslant K(x_1, y)\ \forall x, y$. Следовательно, (x_1, y_2) — седловая точка. Для (x_2, y_1) доказательство аналогичное. $\square$

2. Из равенства $K(x_0, y_0) = \underline{I} = \overline{I}$ для некоторой пары (x_0, y_0) не следует, что (x_0, y_0) является седловой точкой. Например:

   $$\begin{array}{cc} & \scriptstyle j_0=2 \\ \scriptstyle i_0=2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 1 & \underline{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

   Здесь значение элемента $(2, 2)$ матрицы равно 2 и совпадает с верхней и нижней ценой игры; тем не менее, эта точка не является седловой (в отличие от точки $(1, 1)$). $\square$

Пример. Допустим, необходимо найти верхнюю и нижнюю цену игры с платёжной функцией следующего вида:

$$K(x, y) = 1 - (x - y)^2,\ X = Y = [0, 1].$$

Распишем выражение для $\underline{W}(x)$:

$$\underline{W}(x) = \min_{y \in [0,1]} K(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2, & x > 0,5 \quad (y = 0); \\ 1 - (x-1)^2, & x \leqslant 0,5 \quad (y = 1). \end{cases}$$

Для нахождения нижней цены игры необходимо найти $\max\limits_{x \in [0,1]} \underline{W}(x)$.
Решаем соответствующее уравнение:

$$1 - x^2 = 1 - (x - 1)^2.$$

Получаем, что $x_0 = 0,5$, а $\underline{I} = 0,75$.

Аналогично, для верхней цены игры:

$$\overline{W}(y) = \max_{x \in [0,1]} K(x, y) = 1 \quad .$$

$$\min_{y \in [0,1]} \overline{W}(y) = 1.$$

Таким образом, $y_0 \in [0, 1]$, а $\overline{I} = 1$.

Заметим также, что $\underline{I} < \overline{I}$. Поэтому седловой точки здесь нет, а цена информации составляет $0,25$. $\square$

Пример («бесшумная дуэль»).
Рассмотрим игру следующего вида. Пусть есть два игрока, дерущихся на дуэли. Каждый обладает одним выстрелом. Первый игрок может выстрелить в момент времени $x \in [0, 1]$ с вероятностью $p(x)$; соответственно, второй игрок — в момент времени $y \in [0, 1]$ с вероятностью $q(x)$. При этом, если один из игроков стреляет, но промахивается, то считается, что его оппонент об этом не знает, и это не влияет на его выбор момента для выстрела (именно поэтому дуэль называется «бесшумной»).

Платёж определяется следующим образом:

1	—	первый игрок поразил второго, а сам остался цел;
-1	—	второй игрок поразил первого, а сам остался цел;
0	—	либо оба поразили друг друга, либо оба промахнулись.

Соответственно, платёжная функция представляет собой математическое ожидание платежа:

$$K(x,y)=\begin{cases} p(x)-(1-p(x))q(y), & x<y;\\ p(x)(1-q(x))-(1-p(x))q(x), & x=y;\\ -q(y)+(1-q(y))p(x), & x>y. \end{cases}$$

Положим $p(x)\equiv x$, $q(y)\equiv y$. Это возрастающие функции. Таким образом моделируется ситуация, когда игроки на дуэли постепенно сближаются, — выгоднее стрелять позже, с близкого расстояния (но если ждать слишком долго, повышается шанс быть поражённым). Тогда

$$K(x,y)=\begin{cases} x-y+xy, & x<y\\ 0, & x=y\\ x-y-xy, & x>y \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\underline{W}(x)$:

$$\underline{W}(x)=\inf_{y\in[0,1]}K(x,y)=\min(-x^2,2x-1).$$

Найдём максимум $\underline{W}(x)$ на отрезке $x\in[0,1]$:

$$-x^2=2x-1,\quad x\in[0,1].$$

Получим, что $x_0=\sqrt{2}-1$, а $\underline{I}=2\sqrt{2}-3$.

Аналогично, $y_0=\sqrt{2}-1$, а $\overline{I}=3-2\sqrt{2}$.

Так как $\underline{I}\neq\overline{I}$, в этой игре нет седловой точки. $\square$

Пример («шумная дуэль»).
Теперь будем считать, что каждый игрок слышит выстрел оппонента. В случае, если тот промахнулся, можно изменить свою стратегию и стрелять в последний момент времени (шанс поразить соперника при этом повышается).

$$K(x,y)=\begin{cases} p(x)-(1-p(x))q(1), & x<y;\\ p(x)(1-q(x))-(1-p(x))q(x), & x=y;\\ -q(y)+(1-q(y))p(1), & x>y. \end{cases}$$

Так же, как в в случае бесщумной дуэли, положим $p(x)\equiv x$, $q(y)\equiv y$, $x,y\in[0,1]$. Тогда

$$K(x,y) = \begin{cases} 2x-1, & x<y; \\ 0, & x=y; \\ 1-2y, & x>y. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $\overline{W}(y)$:

$$\overline{W}(y) = \sup_{x\in[0,1]} K(x,y) = \max(2y-1, 1-2y).$$

Найдём минимум $\overline{W}(y)$ на отрезке $y \in [0,1]$:

$$2y - 1 = 1 - 2y.$$

Таким образом, $y_0 = 0,5$, $\overline{I} = 0$. Аналогично, $x_0 = 0,5$, $\underline{I} = 0$. В этой игре $(0,5, 0,5)$ является седловой точкой. $\square$

Пример (игра с выбором момента времени).
Рассмотрим игру следующего вида. Есть два игрока; первый — подводная лодка, второй — обороняющийся объект. Стратегия первого игрока — в момент времени $x \in [0,1]$ всплыть и поразить объект. Стратегия второго игрока — в момент времени $y \in [0,1]$ запустить осветительную ракету и поразить лодку. Ракета светится в течение времени d; лодка ракету не видит. Если лодка всплывет в интервале $[y, y+d]$, она будет уничтожена; в противном случае она сама уничтожит объект.

Если лодка уничтожила объект, выигрыш составляет 1; если объект уничтожил лодку, выигрыш равен 0. Соответсвенно, платёжная функция будет иметь следующий вид:

$$K(x,y) = \begin{cases} 1, & x<y \text{ или } x>y+d; \\ 0, & x \in [y, y+d]. \end{cases}$$

Положим $d = \frac{1}{2}$.
Очевидно, $\underline{W}(x) \equiv 0$, $\underline{I} = 0$, $x_0 \in [0,1]$; $\overline{W}(x) \equiv 1$, $\overline{I} = 1$, $y_0 \in [0,1]$. Седловой точки нет. $\square$

Достаточные условия существования седловых точек в играх с выпукло-вогнутыми платёжными функциями.

Вспомним некоторые определения и свойства из математического анализа.

Множество Y называется *выпуклым*, если

$$\forall y_1, y_2 \in Y,\ \forall \alpha \in (0,1) \quad \alpha y_1 + (1-\alpha) y_2 \in Y.$$

Пусть функция $f(y)$ определена на выпуклом множестве Y. $f(y)$ называется *выпуклой функцией*, если

$$\forall y_1, y_2 \in Y\ (y_1 \neq y_2),\ \forall \alpha \in (0,1) \quad f(\alpha y_1 + (1-\alpha) y_2) \leqslant \alpha f(y_1) + (1-\alpha) f(y_2).$$

Если в последнем неравенстве знак $\leqslant$ заменить $<$, $\geqslant$ или $>$, то получим определение, соответственно, строго выпуклой, вогнутой или строго вогнутой функции.

Свойства:

1. Сумма двух выпуклых функций является выпуклой функцией.

   Сумма двух вогнутых функций является вогнутой функцией.

   Сумма выпуклой и строго выпуклой функции является строго выпуклой функцией.

   Сумма вогнутой и строго вогнутой функции является строго вогнутой функцией.

2. Строго выпуклая функция на выпуклом множестве имеет единственную точку минимума.

   Строго вогнутая функция на выпуклом множестве имеет единственную точку максимума.

3. Если f'' — неотрицательная функция, то f — выпуклая функция.

   Если f'' — положительная функция, то f — строго выпуклая функция.

   Если f'' — неположительная функция, то f — вогнутая функция.

   Если f'' — отрицательная функция, то f — строго вогнутая функция.

Пример. Пусть дана следующая функция:

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Вычисляем её первую и вторую производные:

$$f'(x) = (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n);$$

$$f''(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что $(f''x, x) > 0 \; \forall x \neq 0$. Следовательно, исходная функция является строго выпуклой. $\square$

Теорема (фон Неймана). Пусть функция $K(x, y)$ определена и непрерывна на множестве $X \times Y$, где $X \subset E^n$, $Y \subset Y^m$ — выпуклые компакты евклидовых конечномерных пространств. Пусть $K(x, y)$ вогнута по x и выпукла по y. Тогда $K(x, y)$ имеет седловую точку.

Замечание. Условия теоремы являются достаточными, но не являются необходимыми.

Пример. Рассмотрим функцию

$$K(x, y) = x^2 + 0 \cdot y, \quad x, y \in [0, 1].$$

Для этой функции справедливы следующие соотношения:

$$K(x, 1) = x^2 + 0 \cdot 1 \leqslant 1^2 + 0 \cdot 1 \leqslant 1^2 + 0 \cdot y = K(1, y).$$

Следовательно, $(1,1)$ является седловой точкой, хотя функция и не является вогнутой по x. $\square$

Пример. Рассмотрим функцию

$$K(x,y) = y\ln(x+3) + xy^2, \quad x, y \in [0,1].$$

Вычислим её вторые производные по x и y.

$$K'_x = \frac{y}{x+3} + y^2;$$

$$K''_{xx} = -\frac{y'}{(x+3)^2} \leqslant 0 \quad \Rightarrow \quad K(x,y) \text{ вогнута по } x.$$

$$K'_y = \ln(x+3) + 2xy;$$

$$K''_{yy} = 2x \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad K(x,y) \text{ выпукла по } y.$$

Следовательно, по теореме фон Неймана у $K(x,y)$ существует седловая точка. Таковой является точка $(0,1)$. $\square$

Доказательство (теоремы фон Неймана).

1. Сначала рассмотрим частный случай, когда $K(x, y)$ строго вогнута по X и строго выпукла по Y. Тогда при любом фиксированном x минимум по x у $K(x, y)$ будет достигаться в единственной точке $y(x)$. Определенная таким образом функция $y(x)$ является непрерывной. Докажем это от противного. Пусть $y(x)$ не является непрерывной в некоторой точке x_0:

$$\exists x_0 : \ x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0, \ y(x_n) \not\xrightarrow[n\to\infty]{} y(x_0)$$

Следовательно, существует окрестность U точки $y(x_0)$, вне которой находится бесконечное число членов последовательности $\{y(x_n)\}$. Так как Y — компакт, множество $Y \setminus U$ тоже будет компактным. Следовательно, из $\{y(x_n)\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y(x_{n_k})\}$, сходящуюся к некоторому $y_1 \neq y(x_0)$.

Используя определение $y(x)$, получаем:

$$K(x_{n_k}, y(x_{n_k})) \leqslant K(x_{n_k}, y) \ \forall y \in Y.$$

Отсюда, устремляя n к бесконечности, получаем:

$$K(x_0, y_1) \leqslant K(x_0, y) \ \forall y \in Y.$$

Получается, что y_1 — точка минимума, не совпадающая с $y(x_0)$. Получили противоречие. Следовательно, функция $y(x)$ является непрерывной.

Рассмотрим функцию

$$\underline{W}(x) = \min_{y \in Y} K(x, y) = K(x, y(x)).$$

Она также является непрерывной (доказательство этого факта аналогично доказательству непрерывности $y(x)$).

Следовательно, мы можем рассмотреть точку x^*, максимизующую $\underline{W}(x)$ на X:

$$\max_{x \in X} \underline{W}(x) = \underline{W}(x^*).$$

Докажем, что пара $(x^*, y(x^*))$ — седловая точка функции $K(x,y)$. Для любых $x \in X, y \in Y$ и $0 < t < 1$ в силу строгой вогнутости по x функции $K(x,y)$ справедливо

$$\begin{aligned} K\left((1-t)x^* + tx, y\right) > \\ > (1-t)K(x^*, y) + tK(x,y) \geqslant \\ \geqslant (1-t)\underline{W}(x^*) + tK(x,y). \end{aligned}$$

Положим $\tilde{y} = y\left((1-t)x^* + tx\right)$. Тогда

$$w(x^*) \geqslant w\left((1-t)x^* + tx\right) > (1-t)w(x^*) + tK(x, \tilde{y}).$$

Упростив, получаем неравенство

$$w(x^*) > K(x_i, \tilde{y}).$$

Теперь, устремив t к 0, получаем неравенство

$$K(x^*, y(x^*)) = w(x^*) \geqslant K(x, y(x^*)) \; \forall x \in X.$$

В итоге

$$K(x, y(x^*)) \leqslant K(x^*, y(x^*)) \leqslant K(x*, y) \; \forall x \in X, y \in Y,$$

то есть $(x^*, y(x^*))$ действительно является седловой точкой функции $K(x,y)$.

2. Теперь докажем теорему в общем случае, сняв с $K(x,y)$ ограничение строгой вогнутости по x. Рассмотрим следующую функцию:

$$K_\varepsilon(x,y) = \underbrace{\underbrace{K(x,y)}_{\text{вогн. по } x\text{, вып. по } y} - \underbrace{\varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2}_{\text{стр. вогн. по } x} + \underbrace{\varepsilon \sum_{j=1}^{m} y_j^2}_{\text{стр. вып. по } y}}_{\text{стр. вогн по } x\text{, стр. вогн. по } y}, \varepsilon > 0.$$

По доказанному выше функция $K(x)$ имеет седловую точку $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ на $X \times Y$:

$$K_\varepsilon(x, y_\varepsilon) \leqslant K_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqslant K_\varepsilon(x_\varepsilon, y) \; \forall x \in X, y \in Y.$$

Запишем следующую цепочку неравенств:

$$\boxed{K(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant \\ \leqslant K_\varepsilon(x, y_\varepsilon) \leqslant \boxed{K_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon)} \leqslant K_\varepsilon(x_\varepsilon, y) \leqslant \\ \leqslant \boxed{K(x_\varepsilon, y) + \varepsilon \sum_{j=1}^{m} y_j^2}.$$

Выделим из неё тройное неравенство:

$$K(x, y_\varepsilon) - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant K_\varepsilon(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqslant K(x_\varepsilon, y) + \varepsilon \sum_{j=1}^{m} y_j^2$$

Возьмём последовательность $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Тогда из компактности X и Y следует, что $x_{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$, $y_{\varepsilon_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} y^*$. Полагая в последнем тройном неравенстве $\varepsilon = \varepsilon_n$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$K(x, y^*) \leqslant K(x^*, y^*) \leqslant K(x^*, y) \; \forall x \in X, y \in Y.$$

Таким образом, исходная функция $K(x, y)$ имеет седловую точку (x^*, y^*). $\square$

Необходимые условия существования седловой точки.

Рассматриваем функцию $K(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, с множествами X и Y следующего вида:

$$X = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i,\ i = \overline{1, n}\};$$
$$Y = \{y = (y_1, \ldots, y_m) : c_j \leqslant y_j \leqslant d_j,\ j = \overline{1, m}\}.$$

Пусть также функция $K(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$ и имеет частные производные K'_{x_i}, K'_{y_j}.

Рассмотрим такую систему уравнений:

$$\begin{cases} K'_{x_i}(x, y)(x_i - a_i)(x_i - b_i) = 0, & i = \overline{1, n}; \\ K'_{y_j}(x, y)(y_j - c_j)(y_j - d_j) = 0, & j = \overline{1, m}. \end{cases} \qquad (*)$$

Обозначим множество решений этой системы за $C = \{(x, y)\}$ (рассматриваем случай, когда оно конечно). Введём в рассмотрение ещё два множества:

$$X^C = \{x \in X : \exists y \in Y, (x, y) \in C\},$$
$$Y^C = \{y \in Y : \exists x \in X, (x, y) \in C\}.$$

Теорема. Пусть (x^0, y^0) — седловая точка функции $K(x, y)$ на $X \times Y$. Тогда $(x^0, y^0) \in C$ и (x^0, y^0) — седловая точка игры с платёжной матрицей $K(x, y)$, $x \in X^C$, $y \in Y^C$.
Доказательство. По определению седловой точки

$$K(x, y^0) \leqslant K(x^0, y^0) \leqslant K(x^0, y)\ \forall x \in X, y \in Y.$$

Из левой части этого двойного неравенства получаем, что

$$\max_{a_i \leqslant x_i \leqslant b_i} K(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0) = K(x^0, y^0).$$

То же верно для всех i; аналогично (рассматриваем правую часть двойного неравенства и записываем min вместо max) — и для всех j. Из этого следует, что x_0, y_0 является решением системы $(*)$. Значит, $(x^0, y^0) \in C$.

Доказательство второго утверждения тривиально — раз приведённое выше двойное неравенство выполняется везде на $X \times Y$, то оно будет выполняться и на $X^C \times Y^C \subseteq X \times Y$. Следовательно, x_0, y_0 по определению будет являться седловой точкой игры с платёжной матрицей $K(x, y)$, $x \in X^C$, $y \in Y^C$. $\square$

Пример. Можно находить седловые точки игры, пользуясь приведённой выше теоремой. Ведь все седловые точки исходной игры являются седловыми точками игры с платёжной матрицей описанного в теореме вида. Поэтому можно предложить такой алгоритм:

- построить для исходной игры систему $(*)$;
- решив эту систему, найти множество C;
- построить по множеству C множества X^C и Y^C;
- построить игру с платёжной функцией $K(x, y)$ при $x \in X^C$, $y \in Y^C$;
- найти седловые точки этой игры;
- если они существуют, проверить, являются ли они седловыми точками исходной игры, — других седловых точек у исходной игры по теореме быть не может.

Например, рассмотрим игру с платёжной функцией

$$K(x, y) = 8(4xy^2 - 2x^2 - y),\ x, y \in [0, 1].$$

Записываем частные производные:

$$K'_x = 8(4y^2 - 4x), \quad K'_y = 8(xy - 1).$$

Записываем систему $(*)$:

$$\begin{cases} 32(y^2 - x)(x - 0)(x - 1) & = 0 \\ 8(8xy - 1)(y - 0)(y - 1) & = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

Записываем C:

$$C = \left\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), \left(1, \frac{1}{8}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\right\}$$

Строим X^C и Y^C:

$$X^C = \left\{0, \frac{1}{4}, 1\right\}, \quad Y^C = \left\{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Наконец, строим таблицу игры с $K(x, y)$ при $x \in X^C, y \in Y^C$:

$X^C \setminus Y^C$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	1
0	0	-1	-4	-8
$\frac{1}{4}$	-1	$-1\frac{7}{8}$	$\boxed{-3}$	-1
1	-16	$-16\frac{1}{2}$	-12	8

Выделенный элемент -3 является максимальным в своём столбце и минимальным в своей строке. Следовательно, пара $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ является седловой точкой данной матричной игры.

Легко заметить, что $K''_{xx} = -32$ отрицательна, а $K''_{yy} = 32x$ неотрицательна на $X \times Y$. Следовательно, в силу теоремы фон Неймана исходная платёжная функция $K(x, y)$ имеет седловую точку. А таковой может быть только найденная нами пара $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Следовательно, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ — единственная седловая точка исходной игры. $\square$

Смешанные стратегии в матричной игре.

Рассматриваем матричную игру $A = ||a_{ij}||, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$. Предполагается, что игра происходит много раз.

Введём вероятностный вектор, отражающий выбор первым игроком одной из стратегий с соответствующей вероятностью:

$$p = (p_1, \ldots, p_n), \quad p_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Аналогично для второго игрока:

$$q = (q_1, \ldots, q_m), \quad q_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{m} q_j = 1$$

Вектора p и q называются *смешанными стратегиями* соответственно первого и второго игроков.

Очевидно, что вероятность платежа a_{ij} составляет $p_i q_j$. Таким образом, платёжная функция $A(p,q)$ будет соответствовать математическому ожиданию выигрыша первого игрока:

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} p_i q_j,\ p \in P_n, q \in Q_m,\ \text{где}$$

$$P_n = \{p = (p_1, \ldots, p_n) : p_i \geqslant 0, i = \overline{1,n},\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\};$$

$$Q_m = \{q = (q_1, \ldots, q_m) : q_j \geqslant 0, j = \overline{1,m},\ \sum_{j=1}^{m} q_j = 1\}.$$

Утверждение. Множества P_n и Q_m являются выпуклыми компактами.
Доказательство. Докажем утверждение только для множества P_n (для Q_m доказательство аналогичное).

Сначала докажем, что P_n выпукло. Для этого возьмём два произвольных вектора $p^1, p^2 \in P_n$ и произвольное $\alpha \in (0,1)$. Необходимо доказать, что вектор $\alpha p^1 + (1-\alpha)p^2 \in P_n$.

Так как $p_i^1 \geqslant 0, p_i^2 \geqslant 0\ i = \overline{1,n}$, то и $\alpha p_i^1 + (1-\alpha)p_i^2 \geqslant 0\ i = \overline{1,n}$. Проверим, что сумма компонент исследуемого вектора равна 1:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha p_i^1 + (1-\alpha)p_i^2) = \alpha \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i^1}_{=1} + (1-\alpha) \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i^2}_{=1} = \alpha + (1-\alpha) = 1.$$

Следовательно, P_n действительно является выпуклым множеством.

Теперь докажем компактность P_n. Очевидно, что это множество ограничено; остаётся доказать замкнутость. Возьмём произвольную сходящуюся последовательность векторов $\{p^k\}, p^k \in P_n, p^k \xrightarrow[k\to\infty]{} p_0$. Тогда, опять же, $p_i^0 = \lim\limits_{k\to\infty} p_i^k \geqslant 0$, и

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^0 = \sum_{i=1}^{n} \lim_{k\to\infty} p_i^k = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i^k = 1.$$

Получается, что $p_0 \in P_n$, то есть это множество действительно является замкнутым. А из замкнутости и ограниченности следует его компактность. $\square$

Функция $A(p,q)$ непрерывна по p и q на $P_n \times Q_m$, поэтому можно писать min и max вместо inf и sup. Но функция $\min\limits_{q\in Q_m} A(p,q)$ непрерывна по p на P_n, а функция $\max\limits_{p\in P_n} A(p,q)$ непрерывна по q на Q_m.

Следовательно, наилучший гарантированный результат первого игрока имеет вид

$$\max_{p\in P_n}\min_{q\in Q_m} A(p,q),$$

а наилучший гарантированный результат второго игрока — вид

$$\min_{q\in Q_m}\max_{p\in P_n} A(p,q).$$

Замечание. В итоге — функция $A(p,q)$ является линейной, вогнутой по p, выпуклой по q, а также непрерывной на $P_n \times Q_m$; сами множества P_n и Q_m являются выпуклыми компактами. Следовательно, в силу теоремы фон Неймана у функции $A(p,q)$ существует седловая точка:

$$\exists (p^*, q^*): \; A(p,q^*) \leqslant A(p^*,q^*) \leqslant A(p^*,q) \; \forall p \in P_n, q \in Q_m.$$

Вектора p^* и q^* называются *наилучшими гарантирующими стратегиями* первого и второго игроков соответственно. Из приведённого двойного неравенства следует, что

$$\max_{p\in P_n}\min_{q\in Q_m} A(p,q) = \min_{q\in Q_m}\max_{p\in P_n} A(p,q) = V.$$

Величина V называется *ценой игры*, а тройка (p^*, q^*, V) — *решением игры*. Вектора p^* и q^* также называются *оптимальными смешанными стратегиями (ОСС)* первого и второго игроков соответственно. Итак, **любая матричная игра имеет решение в смешанных стратегиях.**
$\square$

Введём следующие обозначения:

$$A(p,j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i;$$
$$A(i,q) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j.$$

Тогда

$$A(p,q) = \sum_{i=1}^{n} A(i,q) p_i = \sum_{j=1}^{m} A(p,j) q_j.$$

Рассмотрим некоторые свойства ОСС.

1. Каждая пара оптимальных смешанных стратегий в игре с платежной матрицей $A = ||a_{ij}||$ образует пару оптимальных смешанных стратегий в игре с платёжной матрицей $\tilde{A} = ||a_{ij} + c||, c = const$, причём $\tilde{V} = V + c$.

   Доказательство. Выведем соотношение между платёжными функциями этих двух игр:

$$A(p,q) + c = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}p_iq_j + (\sum_{i=1}^{n} p_i)(\sum_{j=1}^{m} q_j)c =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}p_iq_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} cp_iq_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(a_{ij} + c)p_iq_j = \tilde{A}(p,q).$$

   Пусть решение исходной игры имеет вид (p^*, q^*, V). Тогда

$$A(p, q^*) \leqslant A(p^*, q^*) \leqslant A(p^*, q)\ \forall p \in P_n, q \in Q_m.$$

   Следовательно,

$$A(p, q^*) + c \leqslant A(p^*, q^*) + c \leqslant A(p^*, q) + c\ \forall p \in P_n, q \in Q_m.$$

   Переходя к $\tilde{A}(p,q)$, получаем

$$\tilde{A}(p, q^*) \leqslant \tilde{A}(p^*, q^*) \leqslant \tilde{A}(p^*, q)\ \forall p \in P_n, q \in Q_m,$$

   то есть решение образует та же пара смешанных стратегий (p^*, q^*), а цена игры $\tilde{V} = \tilde{A}(p^*, q^*) = A(p^*, q^*) + c = V + c$. □

2. Тройка (p^*, q^*, V) является решением игры тогда и только тогда, когда

$$A(i, q^*) \leqslant V \leqslant A(p^*, j)\ \forall i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}.$$

   Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть (p^*, q^*, V) — решение игры; тогда

$$A(p, q^*) \leqslant V \leqslant A(p^*, q)\ \forall p \in P_n, q \in Q_m.$$

Положив $p = (0, \ldots, 0, 1_{(i)}, 0, \ldots, 0), q = (0, \ldots, 0, 1_{(j)}, 0, \ldots, 0)$, получим

$$A(i, q^*) \leqslant V \leqslant A(p^*, j) \ \forall i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}.$$

Необходимость доказана.

Теперь докажем достаточность. Возьмём вектор $p = (p_1, \ldots, p_n) \in P_n$. Пусть выполнены указанные в условии двойные неравенства, рассмотрим их левые части:

$$A(i, q^*) \leqslant V \ \forall i = \overline{1, n}.$$

Но тогда справедливо и неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} A(i, q^*) p_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} V p_i.$$

Следовательно, $A(p, q^*) \leqslant V$. Аналогично $A(p, q^*) \leqslant A(p^*, q)$. Таким образом, (p^*, q^*) является седловой точкой $A(p, q)$, а тройка (p^*, q^*, V) — решением игры. Таким образом, достаточность тоже доказана. $\square$

3. Справедливы следующие соотношения:

$$\forall p \in P_n \quad \min_{q \in Q_m} A(p, q) = \min_{j=\overline{1,m}} A(p, j);$$
$$\forall q \in Q_m \quad \max_{p \in P_n} A(p, q) = \max_{i=\overline{1,n}} A(i, q).$$

Доказательство. Докажем первое соотношение. Возьмём вектор $q^j = (0, \ldots, 0, 1_{(j)}, 0, \ldots, 0), q^j \in Q_m$. Тогда

$$\min_{q \in Q_m} A(p, q) \leqslant \min_{j=\overline{1,m}} A(p, q^j) = \min_{j=\overline{1,m}} A(p, j).$$

С другой стороны,

$$\min_{q \in Q_m} A(p, q) = \min_{q \in Q_m} \sum_{j=1}^{m} q_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \right) \geqslant$$
$$\geqslant \min_{q \in Q_m} \sum_{j=1}^{m} q_j \left(\min_{j=\overline{1,m}} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i \right) = \min_{q \in Q_m} \sum_{j=1}^{m} q_j \left(\min_{j=\overline{1,m}} A(p, j) \right) =$$
$$= \min_{j=\overline{1,m}} A(p, j) \cdot \min_{q \in Q_m} \sum_{j=1}^{m} q_j = \min_{j=\overline{1,m}} A(p, j).$$

Мы получили, что одновременно выполняются неравенства

$$\min_{q\in Q_m} A(p,q) \leqslant \min_{j=\overline{1,m}} A(p,j), \quad \min_{q\in Q_m} A(p,q) \geqslant \min_{j=\overline{1,m}} A(p,j).$$

Следовательно, сравниваемые величины равны, то есть выполняется первое соотношение теоремы. Доказательство второго производится аналогично. $\square$

Следствия из третьего свойства.

1)

$$\max_{p\in P_n} \min_{j=\overline{1,m}} A(p,j) = \max_{p\in P_n} \min_{q\in Q_m} A(p,q) = V = \min_{j=\overline{1,m}} A(p^*,j);$$

$$\min_{q\in Q_m} \max_{i=\overline{1,n}} A(i,q) = \min_{q\in Q_m} \max_{p\in P_n} A(p,q) = V = \max_{i=\overline{1,n}} A(i,q^*).$$

2)

$$(p^*,q^*,V) \text{ — решение игры} \quad \Leftrightarrow \quad \min_{j=\overline{1,m}} A(p^*,j) = \max_{i=\overline{1,n}} A(i,q^*) = V.$$

4. Пусть (p^*,q^*,V) — решение игры с платёжной функцией A. Тогда

   а) Если $p^*_{i_0} > 0$, то $A(i_0,q^*) = V$;

   б) Если $q^*_{j_0} > 0$, то $A(p^*,i_0) = V$.

Доказательство. Докажем пункт а). Из свойства 2 следует, что $A(i,q^*) \leqslant V,\ i = 1,n$. Доказательство проведём от противного — предположим, что $A(i_0,q^*) < V$. Тогда

$$V = A(p^*,q^*) = \sum_{i\neq i_0} \underbrace{A(i,q^*)}_{\leqslant V} p^*_i + \underbrace{A(i_0,q^*)}_{<V} \underbrace{p^*_{i_0}}_{>0} <$$

$$< \sum_{i\neq i_0} V p^*_i + p^*_{i_0} V = V \sum_{i=1}^{n} p^*_i = V.$$

Таким образом, мы пришли к противоречию: $V < V$. Следовательно, наше предположение неверно, и $A(i_0,q^*) = V$. Пункт б) доказывается аналогично. $\square$

Определение. Обозначим за P^* множество всех оптимальных смешанных стратегий первого игрока, за Q^* — множество всех оптимальных смешанных стратегий второго игрока.

Таким образом, если $p^* \in P^*, q^* \in Q^*$, то (p^*, q^*) — седловая точка игры.

5. Множества P^* и Q^* — выпуклые компакты.
Доказательство. Проведём доказательство для P^*. Сначала докажем выпуклость. Возьмём произвольные $p^1, p^2 \in P^*,\ \alpha \in (0,1)$. Необходимо доказать, что $\alpha p^1 + (1-\alpha)p^2 \in P_n$. По свойству 2 $A(p^1, j) \geqslant V, A(p^2, j) \geqslant V\ \forall j = \overline{1, m}$. Следовательно,

$$A(\alpha p^1 + (1-\alpha)p^2, j) = \alpha \underbrace{A(p^1, j)}_{\geqslant V} + (1-\alpha) \underbrace{A(p^2, j)}_{\geqslant V} \geqslant$$
$$\geqslant \alpha V + (1-\alpha)V = V\ \forall j = 1, m.$$

Значит, в силу того же свойства 2 вектор $\alpha p^1 + (1-\alpha)p^2 \in P_n$. Выпуклость доказана.

Поскольку $P^* \subseteq P_n$, а P_n является ограниченным множеством, то P^* также ограничено.

Остаётся доказать замкнутость. Возьмём произвольную сходящуюся последовательность $p^k \xrightarrow[k\to\infty]{} p^0,\ p^k \in P^*$. В силу замкнутости множества P_n $p^0 \in P_n$. Следовательно,

$$A(p^0, j) = A(\lim_{k\to\infty} p^k, j) = \lim_{k\to\infty} \underbrace{A(p^k, j)}_{\geqslant V} \geqslant V; \forall j = \overline{1, m}.$$

В силу свойства 2 $p^0 \in P^*$. Следовательно, множество P^* является замкнутым. А из замкнутости и ограниченности следует его компактность. Доказательство для множества Q^* производится аналогично. $\square$

Методы решения матричных игр в смешанных стратегиях.

Рассмотрим свойство игр, которое позволит уменьшить размерность матрицы (а чем она меньше, тем проще ищется решение игры).

Рассматривается матрица $m \times n$. Первый игрок выбирает стратегии-строки, второй игрок — стратегии-столбцы. Предположим, в матрице есть строка, в которой каждый элемент меньше, чем соответствующий элемент какой-то другой строки. Поскольку первый игрок стремится максимизировать свой выигрыш, он никогда не будет использовать первую строку. Следовательно, эта строки будут входить в вероятностный вектор первого игрока с нулевой вероятностью.

Обобщим это утвеждение.
Теорема. (Доминирование строк и столбцов в матричной игре.)

1. Если некоторая строка матрицы A доминируется (строго доминируется) выпуклой линейной комбинацией остальных строк, то эта строка входит с нулевой вероятностью в некоторую (в любую) оптимальную смешанную стратегию первого игрока (ее можно вычеркнуть).
2. Если некоторый столбец доминирует (строго доминирует) выпуклую линейную комбинацию остальных строк, то этот столбец входит с нулевой вероятностью в некоторую (в любую) оптимальную смешанную стратегию второго игрока (его можно вычеркнуть).

Замечание. Если вычёркивать строки или столбцы в случае нестрогого доминирования, некоторые оптимальные смешанные стратегии могут быть потеряны.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Сначала рассмотрим случай нестрогого доминирования.

Пусть строка матрицы A с номером i_0 нестрого доминируется выпуклой линейной комбинацией остальных строк:

$$a_{i_0 j} \leqslant \sum_{i \neq i_0} \alpha_i a_{ij}, j = \overline{1, m}, \text{ где}$$

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{i_0-1}, \alpha_{i_0+1}, \ldots, \alpha_n \geqslant 0,$$
$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq i_0}}^{n} \alpha_i = 1.$$

Пусть p^* — некоторая ОСС первого игрока. Построим по ней вектор $\tilde{p}$ следующего вида:

$$\tilde{p}_i = \begin{cases} 0, & i = i_0, \\ p_i^* + \alpha_i p_{i_0}^*, & i \neq i_0. \end{cases}$$

Очевидно, что $p_i^* + \alpha_i p_{i_0}^* \geqslant 0 \ \forall i = \overline{1, n}$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} \tilde{p}_i = \sum_{i\neq i_0} (p_i^* + \alpha_i p_{i_0}^*) = \sum_{i\neq i_0} p_i^* + p_{i_0}^* \underbrace{\sum_{i\neq i_0} \alpha_i}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} p_i^* = 1.$$

Следовательно, вектор $\tilde{p}$ является смешанной стратегией первого игрока. Докажем, что $\tilde{p}$ является ОСС первого игрока.

$$A(\tilde{p}, j) = \sum_{i\neq i_0} \left(p_i^* + \alpha_i p_{i_0}^*\right) a_{ij} =$$
$$= \sum_{i\neq i_0} p_i^* a_{ij} + p_{i_0}^* \underbrace{\sum_{i\neq i_0} \alpha_i a_{ij}}_{\geqslant a_{i_0 j}} \geqslant \sum_{i\neq i_0} p_i^* a_{ij} + p_{i_0}^* a_{i_0 j} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} p_i^* a_{ij} = A(p^*, j) \geqslant V.$$

Следовательно, в силу свойства 2 вектор $\tilde{p}$ действительно является ОСС первого игрока. При этом строка i_0 по построению входит в эту ОСС с нулевой вероятностью.

Осталось рассмотреть случай строгого доминирования. Пусть теперь строка i_0 строго доминируется линейной комбинацией остальных строк:

$$a_{i_0 j} < \sum_{i\neq i_0} \alpha_i a_{ij}, \ j = \overline{1, m}.$$

Возьмём произвольную ОСС первого игрока, $p^* \in P^*$. Докажем, что $p_{i_0}^* = 0$. Пойдём от противного — пусть $p_{i_0}^* > 0$. Поскольку $p^* \in P^*$, то для любой $q^* \in Q^*$ справедливо равенство $V = A(i_0, q^*)$. Получаем, что

$$V = A(i_0, q^*) = \sum_{j=1}^{m} a_{i_0 j} q_j^* <$$

$$< \sum_{j=1}^{m} \sum_{i \neq i_0} \alpha_i a_{ij} q_j^* = \sum_{i \neq i_0} \alpha_i \underbrace{\sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j^*}_{=A(i,q^*)} =$$

$$= \sum_{i \neq i_0} \alpha_i \underbrace{A(i, q^*)}_{\leqslant V} \leqslant V \sum_{i \neq i_0} \alpha_i = V.$$

Мы пришли к противоречию: $V < V$. Следовательно, наше предположение неверно, и во все ОСС первого игрока строка i_0 будет входить с нулевой вероятностью.
Доказательство в случае доминирования столбцов производится аналогично. $\square$

Пример. Допустим, требуется найти хотя бы одну ОСС в игре с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Будем применять доказанную выше теорему. Очевидно, первая строка матрицы A нестрого доминируется третьей строкой. Поскольку нужно найти хотя бы одно решение, эту строку можно исключить:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Первый столбец доминирует третий столбец:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Первый столбец доминирует выпуклую линейную комбинацию второго и третьего столбцов с коэффициентами $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Наконец, первая строка доминируется выпуклой линейной комбинацией второй и третьей строк с коэффициентами $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = A'.$$

Игра с матрицей A' имеет следующее решение (без вывода):

$$V = \frac{8}{3}, \quad p^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad q^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Это можно проверить, убедившись в справедливости неравенств

$$A'(p^*, j) \geqslant \frac{8}{3}, \quad A'(i, q^*) \leqslant \frac{8}{3}.$$

Следовательно, соответствующее решение исходной игры будет иметь вид

$$p_A^* = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad q_A^* = \left(0, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad V_A = \frac{8}{3}. \quad \square$$

Может возникнуть вопрос о том, что даёт игрокам использование смешанных стратегий. Для ответа достаточно рассмотреть следующую цепочку неравенств (рассматривается игра с матрицей A):

$$\underline{I} = \max_i \min_j a_{ij} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{p \in P_n} \min_j A(p, j) = V = \min_{q \in Q_m} \max_i A(i, q) \leqslant$$
$$\leqslant \min_j \max_i a_{ij} = \overline{I}.$$

Таким образом, применение смешанных стратегий может только улучшить гарантированный выигрыш, причём как первого, так и второго игрока. Тем не менее, если существует седловая точка, то $\overline{I} = \underline{I}$, и использование смешанных стратегий ничего не даст игрокам.

Пример. Рассмотрим игру с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\underline{I} = 0, \overline{I} = 1$, а решение игры имеет вид

$$p^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad q^* = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad V = \frac{1}{2}.$$

В этом примере использование смешанных стратегий оправданно.

Графический метод решения игр размером $2 \times m$ и $n \times 2$.

Сначала рассмотрим случай, когда матрица игры имеет размерность $2 \times m$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2m} \end{pmatrix}.$$

В этом случае вероятностный вектор, определяющий смешанную стратегию первого игрока, имеет размерность 2 и может быть записан в следующем виде:

$$\overline{p} = (p, 1 - p), \quad p \in [0, 1].$$

Следовательно, цена игры V будет иметь вид

$$V = \max_{\overline{p} \in P_2} \min_j A(\overline{p}, j), \text{ где}$$
$$A(\overline{p}, j) = a_{1j}p + a_{2j}(1-p) = a_{2j} + \underbrace{(a_{1j} - a_{2j})}_{k_j} p$$

Таким образом, для нахождения цены игры достаточно построить семейство прямых $y = l_j(p) = a_{2j} + (a_{1j} - a_{2j})p$ и найти точку максимума т.н. *нижней огибающей* этого семейства:

$$V = \max_{p \in [0,1]} \min_j l_j(p).$$

Если максимум достигается на отрезке прямой с нулевым угловым коэффициентом, то для построения оптимальной смешанной стратегии можно взять любую точку этого отрезка.

Теперь найдём оптимальную стратегию второго игрока. Рассмотрим все возможные случаи:

1. $p^0 \in (0;1)$.

   Возьмём две прямые l_{j_1}, l_{j_2}:

   $$l_{j_1}(p^0) = l_{j_2}(p^0) = V, \quad k_{j_1} \geqslant 0, k_{j_2} \leqslant 0.$$

   Рассмотрим уравнение

   $$K_{j_1}q + K_{j_2}(1-q) = 0.$$

   Оно имеет решение

   $$q^0 = -\frac{K_{j_2}}{K_{j_1} - K_{j_2}}, q^0 \in [0;1].$$

   Построим на основе q_0 смешанную стратегию второго игрока следующим образом:

   $$\overline{q}^0 = (0, \ldots, 0, q^0_{j_1}, 0, \ldots, 0, 1 - {q^0}_{j_2}, 0, \ldots, 0).$$

   Докажем её оптимальность. Для этого, в свою очередь, необходимо доказать, что
   $$A(\overline{p}, \overline{q}^0) \leqslant V \; \forall \overline{p} \in P_2.$$

Перепишем $A(\overline{p}, \overline{q}^0)$ в другом виде:

$$A(\overline{p}, \overline{q}^0) = \sum_{j=1}^{m} [a_{1j}p + a_{2j}(1-p)]\overline{q}_j^0 =$$
$$= \underbrace{[a_{1j_1}p + a2j_1(1-p)]}_{l_{j_1}(p)} q^0 + \underbrace{[a_{1j_2}p + a_{2j_2}(1-p)]}_{l_{j_2}(p)}(1-q^0) =$$
$$= l_{j_1}(p)q^0 + l_{j_2}(p)(1-q^0).$$

Получается, что при $\overline{p} = \overline{p}^0$

$$A(\overline{p^0}, \overline{q}^0) = Vq^0 + V(1-q^0) = V.$$

С другой стороны,

$$A(\overline{p}, \overline{q}^0) =$$
$$= a_{2j_1}q^0 + a_{2j_2}(1-q^0) + p\underbrace{\left[\underbrace{(a_{1j_1} - a_{2j_1})}_{k_{j_1}} q^0 + \underbrace{(a_{1j_2} - a_{2j_2})}_{k_{j_2}}(1-q^0)\right]}_{=0} =$$
$$= a_{2j_1}q^0 + a_{2j_2}(1-q^0).$$

Таким образом, угловой коэффициент этой прямой равен нулю, а при $\overline{p} = \overline{p}^0$ её значение равно V. Следовательно, $A(\overline{p}, \overline{q}^0) = V \forall \overline{p} \in P_2$, что доказывает оптимальность стратегии $\overline{q}^0$. $\square$

2. $p^0 = 0$.

   В этом случае существует прямая $l_{j_1}(p)$ такая, что

$$l_{j_1}(0) = V; \quad l_{j_1}(p) \leqslant V \ \forall p \in [0,1].$$

   Следовательно, второй игрок может просто выбрать чистую стратегию

$$\overline{q}^0 = (0, \ldots, 0, 1_{j_1}, 0, \ldots, 0). \quad \square$$

3. $p^0 = 1$.

   Этот случай аналогичен предыдущему. $\square$

Теперь рассмотрим случай, когда матрица A имеет размерность $n \times 2$. Сведём задачу к предыдущей; введём в рассмотрение матрицу $A = -A^T$, которая будет иметь размерность $2 \times n$. Для игры с такой матрицей мы можем найти решение — обозначим его (p^*, q^*, V). Следовательно,

$$\tilde{A}(p^*, j) \geqslant V \ \forall j = \overline{1, n}.$$

Из этого, в свою очередь, получаем:

$$\begin{gathered} -A^T(p^*, j) \geqslant V; \\ A^T(p^*, j) \leqslant -V; \\ A(j; p^*) \leqslant -V \ \forall j = \overline{1, n}. \end{gathered}$$

Аналогично можно доказать, что $A(q^*, i) \geqslant -V, \ i = \overline{1, 2}$. Следовательно, игра с матрицей A имеет решение $(q^*, p^*, -V)$.

Пример. Рассмотрим игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Запишем для неё матрицу

$$\tilde{A} = -A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Построим семейство прямых $y = l_j(p), j = \overline{1, 4}$:

$$\begin{gathered} l_1(p) = 1 \cdot p + (-1) \cdot (1 - p) = 2p - 1; \\ l_2(p) = 1 - p; \\ l_3(p) = 6p - 2; \\ l_4(p) = -6p + 5. \end{gathered}$$

Построив график, можно убедиться в том, что максимум нижней огибающей семейства этих прямых достигается в точке пересечения прямых $l_1(p)$ и $l_2(p)$:

$$2p - 1 = 1 - p.$$

Отсюда $p^0 = \frac{2}{3}$ и $\overline{p}^0 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, а цена игры $V = \frac{1}{3}$. Стратегию второго игрока найдём из уравнения $k_1 q + k_2(1-q) = 0$:

$$k_1 = 2, k_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad 2q - 1 + q = 0.$$

Получаем, что $q_0 = \frac{1}{3}$ и $\overline{q}^0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right)$.

Следовательно, решение исходной игры будет иметь вид $(q^0, p^0, -\frac{1}{3})$. $\square$

Итеративный метод Брауна.

Рассматриваем игру с матрицей A размерности $n \times m$. Идея метода состоит в том, что игра как бы (фиктивно) производится многократно, и на каждой итерации игроки определённым способом выбирают чистые стратегии. А потом на их основе строятся смешанные стратегии; причём, чем больше использовалась какая-то чистая стратегия, тем с большей вероятностью она будет входить в итоговую смешанную стратегию.

Формализуем вышеописанную идею. Пусть производилось k реализаций игры. Пусть при этом i-тая чистая стратегия первого игрока ($i = \overline{1,n}$) применялась r_i раз:

$$r_1, \ldots, r_n, \quad \sum_{i=1}^{n} r_i = k.$$

Аналогично, пусть j-тая чистая стратегия второго игрока ($j = \overline{1,m}$) применялась l_j раз:

$$l_1, \ldots, l_m, \quad \sum_{j=1}^{m} l_j = k.$$

Тогда в качестве смешанных стратегий выбираются

$$p^k = \left(\frac{r_1}{k}, \ldots, \frac{r_n}{k}\right) \text{ и } q^k = \left(\frac{l_1}{k}, \ldots, \frac{l_m}{k}\right).$$

Определим сам итерационный процесс.

1. На первом шаге первый игрок произвольным образом выбирает чистую стратегию i_1, второй игрок — чистую стратегию j_1. Строим векторы p^1 и q^1.

2. Пусть было выполнено k шагов и построены векторы p^k и q^k. Тогда на шаге $k+1$ чистые стратегии i_{k+1} и j_{k+1} выбираются из следующих условий:

$$
\begin{aligned}
A(i_{k+1}, q^k) &= \max_i A(i, q^k) = V_1^k, \\
A(p^k, j_{k+1}) &= \min_j A(p^k, j) = V_2^k.
\end{aligned}
$$

   Другими словами, каждый игрок выбирает свою чистую стратегию на основе смешанной стратегии оппонента за предыдущие шаги.

Стоит заметить, что

$$
\begin{aligned}
V_1^k = \max_{i=\overline{1,n}} A(r, q^k) \geqslant \\
\geqslant \min_{q \in Q_m} \max_{i=\overline{1,n}} A(i, q) = V = \max_{p \in P_n} \min_{j=\overline{1,m}} A(p, j) \geqslant \\
\geqslant \min_{j=\overline{1,m}} A(p^k, j) = V_2^k,
\end{aligned}
$$

то есть $V_2^k \leqslant V \leqslant V_1^k$.

Теорема (без доказательства).
В методе Брауна

$$
\lim_{k \to \infty} V_1^k = \lim_{k \to \infty} V_2^k = V,
$$

а любые предельные точки p^0, q^0 последовательностей $\{p^k\}$, $\{q^k\}$ образуют ОСС первого и второго игроков соответственно.

На практике бесконечное число итераций, разумеется, произвести невозможно. Поэтому вводится понятие *ε-оптимальной смешанной стратегии*. Стратегии p^ε и q^ε называются ε-оптимальными смешанными стратегиями соответственно первого и второго игроков, если

$$
\begin{aligned}
A(p^\varepsilon, q) \geqslant V - \varepsilon \ \forall q, \\
A(p, q^\varepsilon) \leqslant V + \varepsilon \ \forall p.
\end{aligned}
$$

Соответственно, в конечном случае пара $(p^\varepsilon, q^\varepsilon)$ будет являться ε-оптимальной, если

$$A(p^\varepsilon, j) \geqslant V - \varepsilon \; \forall j = \overline{1, m},$$
$$A(i, q^\varepsilon) \leqslant V + \varepsilon \; \forall i = \overline{1, n}.$$

Поскольку $V_1^k - V_2^k \xrightarrow[k\to\infty]{0}$, то, какое бы $\varepsilon > 0$ мы не зафиксировали, всегда найдётся некоторый номер k' такой, что при $k \geqslant k'$ будет справедливо неравенство $V_1^k - V_2^k \leqslant \varepsilon$, а стратегии p^ε и q^ε будут являться ε-оптимальными.

Простое решение игры.

Рассматриваем игры с квадратной матрицей $A_{n\times n}$.

Определение. Тройка (p^*, q^*, V) называется *простым решением игры* с матрицей A, если

$$A(p^*, j) = V, A(i, q^*) = V \quad \forall i, j = \overline{1, n}.$$

Теорема.
Если игра с платежной матрицей A допускает простое решение и $|A| \neq 0$, то простые решения ищутся по формулам

$$p^* = VI'A^{-1}, \quad q^* = VA^{-1}I, \quad V = \frac{1}{I'A^{-1}I}, \text{ где}$$
$$I = \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\} n, \quad I' = \underbrace{(1, 1, \ldots, 1)}_{n},$$

причём других простых решений нет.
Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$p^*A = VI', \quad Aq^* = VI.$$

Так как $|A| \neq 0$, то эта система имеет единственное невырожденное решение

$$p^* = VI'A^{-1}, \quad q^* = VA^{-1}I.$$

Получаем, что

$$V = p^* A q^* = V I' \underbrace{A^{-1} A}_{E} V A^{-1} I = V^2 I' A^{-1} I.$$

Возможны два варианта:

1. $V = 0$ — отпадает, так как в противном случае вектор p^* обязан быть нулевым, что невозможно.

2. $V \neq 0$. Тогда из уравнения следует, что

$$V = \frac{1}{I' A^{-1} I}. \quad \square$$

Из теоремы напрямую следует тот факт, что если простое решение существует, то оно единственно.

Крайние оптимальные смешанные стратегии.

Определение. Пусть X — выпуклое множество. Точка $x_0 \in X$ называется *крайней*, если не существует $x_1, x_2 \in X,\ x_1, x_2 \neq x_0$ и $\alpha \in (0,1)$ таких, что

$$x_0 = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2.$$

Теорема (о крайних ОСС).
Пусть P^*, Q^* — множества ОСС в игре с матрицей $A_{n\times m}$ и пусть $V \neq 0$. Тогда для того, чтобы $p^* \in P^*$, $q^* \in Q^*$ были крайними ОСС, необходимо и достаточно, чтобы A содержала квадратную невырожденную подматрицу B такую, что $\left(p^{*B}, q^{*B}, V(B)\right)$ образует простое решение игры с матрицей B и $V(B) = V$.
Доказательство.

1. Докажем необходимость. Пусть p^*, q^* — ОСС. Введём обозначения

$$\begin{aligned} I_1 &= \left\{i : p_i^* > 0\right\}, \\ I_2 &= \left\{i : A(i, q^*) = V\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\{j : q_j^* > 0\right\}, \\ J_2 &= \left\{j : A(p^*, j) = V\right\}. \end{aligned}$$

В силу свойства 4 ОСС справедливы включения $I_1 \subseteq I_2, J_1 \subseteq J_2$. Кроме того, без ограничения общности (за счёт перестановки строк и столбцов матрицы A) можем считать, что

$$\begin{gathered} I_1 = \{1, \ldots, k\}, \\ I_2 = \{1, \ldots, k, k+1, \ldots d\}, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} J_1 = \{1, \ldots, l\}, \\ J_2 = \{1, \ldots, l, l+1, \ldots h\}. \end{gathered}$$

Таким образом, схематично в матрице A можно выделить девять подматриц:

$$A = \begin{array}{cc} 0 & \begin{array}{ccccc} & \overset{l}{|} & & \overset{h}{|} & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ k- \\ \\ d- \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ \\ A_7 & A_8 & A_9 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Выделим из A подматрицу $\tilde{A}$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_4 & A_5 \end{pmatrix}.$$

Для дальнейшего доказательства необходимо доказать следующую лемму.

Лемма. Первые k строк матрицы $\tilde{A}$ линейно независимы, первые l столбцов матрицы $\tilde{A}$ линейно независимы.
Доказательство. Пойдём от противного. Предположим, что существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{ij} = 0 \ \forall j = \overline{1, h}.$$

Тогда

$$0=\sum_{j=1}^{h} q_j^* \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{j=1}^{h} a_{ij} q_j^* =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} q_j^* = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \underbrace{A(i,q^*)}_{=V} = V \sum_{i=1}^{k} \alpha_i.$$

По условию $V \neq 0$; следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 0$.

Введём вектор

$$\alpha = \underbrace{(\alpha_1, \ldots, \alpha_k, 0, \ldots, 0)}_{n}$$

и рассмотрим стратегии

$$p^\varepsilon = p^* + \varepsilon\alpha, \quad p^{-\varepsilon} = p^* - \varepsilon\alpha; \quad \varepsilon > 0.$$

Взяв достаточно малое ε, можно получить $p_i^\varepsilon \geqslant 0\ \forall i = \overline{1,n}$. Кроме того,

$$\sum_{i=1}^{n} (p_i^* + \varepsilon\alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i^* + \varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i}_{=0} = 1.$$

Следовательно, p^ε является смешанной стратегией. Докажем её оптимальность.

Запишем равенство

$$A(p^\varepsilon, j) = A(p^*, j) + \varepsilon A(\alpha, j).$$

Для $j = \overline{1,h}$

- $A(p^*, j) = V$ по построению множества J_2;
- $A(\alpha, j) = 0$ в силу линейной зависимости первых k строк $\tilde{A}$.

Для $j = \overline{h+1,m}$ $A(p^*, j) > V$ в силу оптимальности p^* и по построению множества J_2.

В итоге

$$\begin{cases} A(p^\varepsilon, j) = V, & j = \overline{1,h}; \\ A(p^\varepsilon, j) > V, & j = \overline{h+1,m} \text{ (выбираем достаточно малые } \varepsilon). \end{cases}$$

Следовательно, при достаточно малых ε p^ε является оптимальной смешанной стратегией первого игрока. Аналогично доказывается, что и $p^{-\varepsilon}$ также является ОСС первого игрока. В то же время

$$p^* = \frac{1}{2}(p^\varepsilon + p^{-\varepsilon}).$$

Мы получили, что p^* является выпуклой линейной комбинацией двух других ОСС, а значит, она не является крайней ОСС. Мы пришли к противоречию с условием теоремы; следовательно, наше допущение неверно и первые k строк матрицы $\tilde{A}$ действительно являются линейно независимыми. Линейная независимость первых l столбцов доказывается аналогично. Таким образом, лемма полностью доказана. $\square$

(продолжение доказательства теоремы)
В силу только что доказанной леммы для ранга матрицы $\tilde{A}$ (обозначим его за t) справедливо неравенство

$$t = r(\tilde{A}) \geqslant \max(k, l).$$

Следовательно, у матрицы $\tilde{A}$ существует невырожденный главный минор B размерности $t \times t$.

Рассмотрим p^{*B} (проекцию p^* на матрицу B). Все положительные элементы p^* входят в p^{*B} по построению множества I_1; следовательно, p^{*B} является смешанной стратегией игры с матрицей B. Кроме того,

$$B(p^{*B}, j) = V, B(i, q^{*B}) = V \ \forall j = \overline{1, t} \text{ по определению } p^{*B},\ I_2 \text{ и } J_2.$$

Следовательно, тройка $\left(p^{*B}, q^{*B}, \underbrace{V}_{=V(B)}\right)$ образует простое решение игры с матрицей B. Необходимость доказана.

2. Осталось доказать достаточность. Пусть у матрицы A существует квадратная невырожденная подматрица B размерности $t \times t$ такая, что $\big(p^{*B}, q^{*B}, V(B)\big)$ образует простое решение игры с матрицей B и $V(B) = V$. Все построения производятся так же, как в предыдущем пункте доказательства. Не ограничивая общности, будем считать, что B находится на первых t строках и столбцах

матрицы A. Тогда, дополнив стратегии p^{*B} и q^{*B} нулями до длин n и m соответственно, получим векторы p^* и q^*, которые будут образовывать ОСС в игре с исходной матрицей A. В итоге необходимо доказать, что $p^* \in P_n^*$ и $q^* \in Q_m^*$ являются крайними ОСС.

Пойдём от противного; пусть p^* не является крайней. Это означает, что существуют такие $p^1, p^2 \in P_n^*,\ p^1, p^2 \neq p^*$, и такое $\alpha \in (0,1)$, что

$$p^* = \alpha p^1 + (1-\alpha)p^2.$$

Более того, поскольку все компоненты стратегии p^* на позициях с $t+1$-ой по n-ую включительно равны нулю, на соответствующих позициях векторов p^1 и p^2 тоже стоят нули. Следовательно, векторы из первых t элементов векторов p^1 и p^2 (назовём их p^{1B} и p^{2B}) являются смешанными стратегиями игры с матрицей B, причём $p^{1B}, p^{2B} \neq p^{*B}$.

В итоге получаем, что при $j = \overline{1,t}$ справедливы равенства

$$A(p^*, j) = B(p^{*B}, j), \quad A(p^1, j) = B(p^{1B}, j), \quad A(p^2, j) = B(p^{2B}, j).$$

Следовательно, из очевидного равенства

$$A(p^*, j) = \alpha A(p^1, j) + (1-\alpha)A(p^2, j)\ \forall j = \overline{1,t}$$

следует равенство

$$B(p^{*B}, j) = \alpha B(p^{1B}, j) + (1-\alpha)B(p^{2B}, j)\ \forall j = \overline{1,t}.$$

Кроме того, при $j = \overline{1,t}$ $B(p^{*B}, j) = V$ (в силу того, что p^{*B} по условию является простым решением); $A(p^1, j), A(p^2, j) \geqslant V$ в силу оптимальности. Учтём всё это в вышенаписанном равенстве:

$$\underbrace{B(p^{*B}, j)}_{=V} = \alpha \underbrace{B(p^{1B}, j)}_{=A(p^1,j)\geqslant V} + (1-\alpha) \underbrace{B(p^{2B}, j)}_{=A(p^2,j)\geqslant V}\ \forall j = \overline{1,t}.$$

Следовательно, $B(p^{1B}, j) = V, B(p^{2B}, j) = V\ \forall j = \overline{1,t}$, то есть p^{1B} и p^{2B} являются простыми решениями игры с матрицей B. Но по условию простым решением является и p^{*B}, а $p^{1B}, p^{2B} \neq p^{*B}$. То есть мы получили больше одного простого решения, что невозможно. Следовательно, наше первоначальное предположение неверно и p^* действительно является крайней ОСС. Доказательство для q^* производится аналогично. Таким образом, достаточность полностью доказана. $\square$

Следствия из теоремы:

1. Множества крайних ОСС и первого, и второго игроков конечны.

2. Множества ОСС обоих игроков являются выпуклыми компактами; число крайних точек конечно. Следовательно, эти множества являются выпуклыми многогранниками.

Вышедоказанная теорема даёт алгоритм, с помощью которого можно найти все крайние ОСС игры. Нужно перебирать все квадратные невырожденные подматрицы B исходной платёжной матрицы, для каждой B пытаться найти простое решение, из векторов p^{*B}, q^{*B} строить вектора p^*, q^* и проверять, будут ли тройки $(p^*, q^*, V(B))$ решением исходной системы.

Пример.
Рассмотрим игру с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

По матрице видно, что у этой игры нет седловых точек; следовательно, решений в чистых стратегиях нет и перебирать подматрицы размерности 1×1 нет смысла. Остаётся перебрать три квадратные подматрицы размерности 2×2:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся следующим алгоритмом нахождения обратных матриц. Для произвольной матрицы

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{t1} & \dots & b_{tt} \end{pmatrix}$$

обратную матрицу можно найти по формулам

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{t1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1t} & \dots & B_{tt} \end{pmatrix}, \quad B_{ij} = |B'_{ij}| \cdot (-1)^{i+j},$$

где B'_{ij} — это матрица B с вычеркнутыми i-ой строкой и j-ым столбцом. В данном случае

$$B^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

По формулам для простых решений

$$V(B) = \left((1,1) \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{4}{3},$$
$$p^{*B} = \frac{4}{3} \cdot (1,1) \cdot B^{-1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right),$$
$$q^{*B} = \frac{4}{3} \cdot B^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3} \right).$$

Получили, что q^{*B} не является смешанной стратегией. Следовательно, простого решения нет.

Аналогично поступаем для C и D.

$$V(C) = \frac{8}{5},$$
$$p^{*C} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right),$$
$$q^{*C} = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5} \right).$$

Здесь $p^* = p^{*C}, q^* = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5} \right)$. Проверяем, что $(p^*, q^*, \frac{8}{5})$ является решением игры, — это действительно так. Следовательно, эта тройка является крайней ОСС исходной игры.

$$V(D) = 2,$$
$$p^{*D} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$
$$q^{*D} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Здесь $p^* = p^{*D}, q^* = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, но при этом тройка $(p^*, q^*, 2)$ не является решением исходной игры.

Таким образом, единственные крайние ОСС для данной игры заключены в решении $\left(p^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right), q^* = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right), V = \frac{8}{5}\right)$. $\square$

Связь теории игр с линейным программированием.

Сначала формально определим несколько задач линейного программирования:

1. Основная задача линейного программирования:

$$\max_{\substack{x \\ Ax \leqslant b \\ x \geqslant 0}} (c, x).$$

   Здесь

$$x = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$A \text{ имеет размерность } m \times n,$$
$$b = (b_1, \ldots, b_m),$$
$$c = (c_1, \ldots, c_n).$$

2. Задача, двойственная к задаче 1:

$$\min_{\substack{y \\ yA \geqslant c \\ y \geqslant 0}} (b, y), \text{ где } y = (y_1, \ldots, y_m).$$

3. Основная задача ЛП в общей форме:

$$\max_{\substack{A(i,x)\leqslant b_i, \quad i=\overline{1,k} \\ A(i,x)=b_i, \quad i=\overline{k+1,m} \\ x_j\geqslant 0, \quad j=\overline{1,r} \\ x_j\in \mathrm{R}, \quad j=\overline{r+1,n}}} (c,x).$$

4. Задача, двойственная к задаче 3:

$$\min_{\substack{A(y,j)\geqslant c_j, \quad j=\overline{1,r} \\ A(y,j)=c_j, \quad j=\overline{r+1,n} \\ y_i\geqslant 0, \quad i=\overline{1,k} \\ y_i\in \mathrm{R}, \quad i=\overline{k+1,m}}} (b,y).$$

Лемма 1. Если x и y — допустимые вектора для задач 1 и 2 (удовлетворяют ограничениям), то $(b,y) \geqslant (c,x)$. Аналогичное утверждение верно и для пары задач 3 и 4.

Лемма 2. Задачи 1 и 2 либо обе не имеют решения, либо обе имеют соответственно решения x^* и y^* такие, что $(c,x^*) = (b,y^*)$. Аналогичное утверждение верно и для пары задач 3 и 4.

Лемма 3. Вектора x^* и y^* являются решениями соответственно задач 1 и 2 тогда и только тогда, когда

а) $x_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad A(y^*, j) = c_j$;

б) $y_j^* > 0 \quad \Rightarrow \quad A(i, x^*) = b_i$.